Tiết GT59 "GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ"

BÀI 4/132:

a/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1>0\\ \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0\\ (x-2)^2>0,\forall x\neq 2\end{cases}$

b/ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}=+\infty$ vì $\begin{cases}\ldots\\ \ldots\\ \ldots\end{cases}$

c/ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}=-\infty$ vì $\begin{cases}\ldots\\ \ldots\\ \ldots\end{cases}$

BÀI 6/133:

a/ $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^4-x^2+x-1)=\lim\limits_{x\to +\infty}x^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}x^4=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)=1>0\end{cases}$

b/ $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^3+3x^2-5)=+\infty$ vì $\begin{cases}\ldots\\ \ldots\end{cases}$

c/ $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=+\infty$ vì $\begin{cases}\ldots\\ \ldots\end{cases}$

d/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}{\dfrac{5}{x}-2}=-1.$

Tiết GT60 "HÀM SỐ LIÊN TỤC"

I. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

1/ Định nghĩa :

• Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_o \in K$. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại x_o nếu $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.

• Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_o được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

2/ Ví dụ : Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ tại $x_o=3$.

Giải

• Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, do đó xác định trên khoảng $(2;+\infty)$ chứa $x_o=3$.

• $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-2}=3=f(3)$.

• Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x_o=3$.

II. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

1/ Định nghĩa :

• Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

• Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

2/ Nhận xét : Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.

III. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

1/ Định lý 1 :

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của TXĐ của chúng.

2/ Định lý 2 :

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_o. Khi đó :

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_o.

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_o nếu $g(x_o)\neq 0$.

VD : Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-2x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 5 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên TXĐ của nó.

Giải

* TXĐ : $D=\mathbb{R}$

* Với $x\neq 1$, ta có hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-2x}{x-1}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1),(1;+\infty)$.

* Tại $x=1$:

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(2x)=2$.
- $f(1)=5$.
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=1$.

* Kết luận : Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1),(1;+\infty)$ và gián đoạn tại $x=1$.

3/ Định lý 3 : Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

VD : Chứng minh phương trình $x^3+2x-5=0$ có ít nhất một nghiệm.

Giải

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x-5$, ta có :

- Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn [0;2] *(1)*
- $\left.\begin{array}{l} f(0)=-5\\ f(2)=7\end{array}\right\}\Rightarrow f(0).f(2)=-35<0$ *(2)*

(1),(2) $\Rightarrow$ phương trình $x^3+2x-5=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng (0;2).

Tiết BSGT51 "BÀI TẬP HÀM SỐ LIÊN TỤC"

1/ Xét tính liên tục của hàm số $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 3x-2 & \text{khi } x=2\end{cases}$ tại $x_o=2$.

HD:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2} g(x)=4\\ g(2)=4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=g(2)$$ nên hàm số $y=g(x)$ liên tục tại $x_o=2$.

2/ Xét tính liên tục của hàm số $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x>2\\ x-1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ tại $x_o=2$.

HD:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=1\\ g(2)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=g(2)$$ nên hàm số $y=g(x)$ liên tục tại $x_o=2$.

3/ Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^3+1} & \text{khi } x\neq -1\\ 2x & \text{khi } x=-1\end{cases}$ tại $x_o=-1$.

HD:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{1}{3}\\ f(-1)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)\neq f(-1)$$ nên hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x_o=-1$.

4/ Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}x^3+2 & \text{khi } x\ge 1\\ \dfrac{3x^2-3x}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ trên tập xác định của nó.

HD:

- Với $x>1$, hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.
- Với $x<1$, hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.
- Tại $x=1$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ nên hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=1$.

5/ Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{khi } x\neq -3\\ 2 & \text{khi } x=-3\end{cases}$ trên tập xác định của nó.

HD:

- Với $x\neq -3$, hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3),(-3;+\infty)$.
- Tại $x=-3$, ta có $\lim\limits_{x\to -3} f(x)\neq f(-3)$ nên hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=-3$.

6/ Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ x^2+3 & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ trên tập xác định của nó.

HD:

- Với $x>1$, hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.
- Với $x<1$, hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.
- Tại $x=1$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.