BÀI TẬP TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Câu 1: Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) + F(a)$.

Câu 2: Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a) = -2$, $f(b) = -4$. Tính $T = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $T = -6$.
B. $T = 2$.
C. $T = 6$.
D. $T = -2$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ thoả mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

A. 5.
B. 29.
C. 19.
D. 9.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2 - 3\ln 2$. Tính $T = a + b$.

A. $T = -1$.
B. $T = 2$.
C. $T = -2$.
D. $T = 0$.

Câu 6: Cho tích phân $I = \int_0^1 \sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân I trở thành tích phân nào sau đây?

A. $I = 3\int_0^1 t\mathrm{d}t$.
B. $I = \int_0^1 t^3\mathrm{d}t$.
C. $I = 3\int_0^1 t^2\mathrm{d}t$.
D. $I = 3\int_0^1 t^3\mathrm{d}t$.

Câu 7: Tính $I = \int_e^{e^2} \dfrac{(1-\ln x)^2}{x}\mathrm{d}x$ được kết quả là

A. $I = \dfrac{13}{3}$.
B. $I = \dfrac{1}{3}$.
C. $I = \dfrac{5}{3}$.
D. $I = \dfrac{4}{3}$.

Câu 8: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x)\cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} + \dfrac{\pi}{b}$ (a, b là các số nguyên khác 0). Tính $T = ab$.

A. $T=32$. **B.** $T=2$. **C.** $T=4$. **D.** $T=12$.

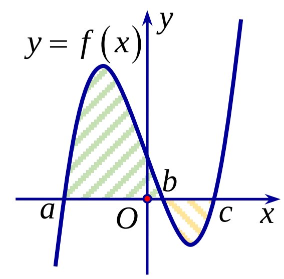
Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=9$ và $F(0)=3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9)=-6$. **B.** $F(9)=6$. **C.** $F(9)=12$. **D.** $F(9)=-12$.

Câu 10: Cho $\int_1^2 f\left(x^2+1\right)x\mathrm{d}x=2$. Khi đó $I=\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=2$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=4$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



A. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 12: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, trục hoành, trục tung, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V=\frac{8\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{4\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{15\pi}{8}$. **D.** $V=\frac{7\pi}{8}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

A. $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 14: Biết $f\ x$ làm hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính $I=\int_1^4 f(3x-3)\mathrm{d}x$.

A. $I=27$. **B.** $I=3$. **C.** $I=0$. **D.** $I=24$.

Câu 15: Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $S=a+b+c$ bằng

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=7$. **D.** $S=9$.

Câu 16: Tính tích phân $I=\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$. Giá trị $a^2+ab+3b^2$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 17: Biết $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f^{'}\left(x\right)=\left(2x+3\right).f^{2}\left(x\right)$ và $f\left(0\right)=\dfrac{-1}{2}$. Biết tổng $f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2017\right)+f\left(2018\right)=\dfrac{a}{b}$ với $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^{*}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Câu 19: Xét hàm số $f\ \ x$ liên tục trên $0;1$ và thỏa mãn điều kiện

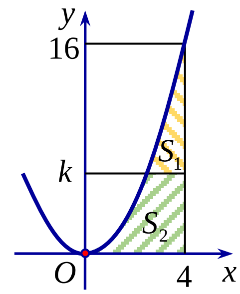
$4xf\left(x^{2}\right)+3f\left(x-1\right)=\sqrt{1-x^{2}}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{16}$

Câu 20: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y=x^{2}$, $y=0$, $x=0$, $x=4$.

Đường thẳng $y=k$ $\left(0<k<16\right)$ chia hình H thành hai phần có diện tích S_1, S_2

(như hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$.



A. $k=8$. **B.** $k=4$. **C.** $k=5$. **D.** $k=3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: B
Câu 2: C
Câu 3: D
Câu 4: B
Câu 5: C
Câu 6: D
Câu 7: B
Câu 8: A
Câu 9: C
Câu 10: D
Câu 11: A
Câu 12: A
Câu 13: A
Câu 14: Chọn B

$I=\int\limits_{1}^{4}f\left(3x-3\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=3x-3\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\ x=4\Rightarrow t=9\end{cases}$

$I=\frac{1}{3}\int_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x=3$.

Câu 15: Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2$; $x=3\Rightarrow t=4$.

Khi đó:

$$\int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}.2t\mathrm{d}t=\int_1^2\frac{t^3-t}{t+2}\mathrm{d}t=\int_1^2\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\right|_1^2=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3$$

Suy ra $\begin{cases}a=7\\ b=-12\\ c=6\end{cases}\Rightarrow a+b+c=1$.

Câu 16: Chọn B

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2t\mathrm{d}t}{3}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=5\Rightarrow t=4$.

Khi đó

$I=\int_2^4\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left.\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right|_2^4=2\ln 3-\ln 5$. Suy ra $\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$. Do đó $a^2+ab+3b^2=5$.

Câu 17: Chọn D

Đặt $I=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}=2\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$$I=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-2\left.\frac{1}{t}\right|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$$

$=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}\Rightarrow a=32$, $b=12$, $c=4$

Vậy $P=a+b+c=48$

Câu 18: Chọn D

Biến đổi $f'(x)=(2x+3).f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+3)dx$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+3x+C}$. Mà $f(0)=\frac{-1}{2}$ nên $=2$.

Do đó $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2+3x+2}=-\dfrac{1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$.

Khi đó $\dfrac{a}{b}=f\left(1\right)+f\left(2\right)+...+f\left(2017\right)+f\left(2018\right)$

$$=-\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{2018.2019}+\frac{1}{2019.2020}\right)=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2020}\right)=\frac{-1009}{2020}.$$

Với điều kiện a,b thỏa mãn bài toán, suy ra: $\begin{cases}a=-1009\\b=2020\end{cases}\Rightarrow b-a=3029$.

Câu 19: Chọn C

Từ

$$4x.f\left(x^2\right)+3f\left(x-1\right)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow 2\int_0^1 2xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\quad(*)$$

+) Đặt $u=x^2\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$.

Khi đó $\displaystyle\int_0^1 2xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\quad(1)$

+) Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\displaystyle\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\quad(2)$

Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được:

$$2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}.$$

Câu 20: Chọn B

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=x^2$ và $y=k$ là $x=\sqrt{k}$.

Do đó diện tích $S_1=\displaystyle\int_{\sqrt{k}}^4\left(x^2-k\right)\mathrm{d}x$, diện tích $S_2=\displaystyle\int_0^4 x^2\mathrm{d}x-S_1$.

Ta có $S_1=S_2\Leftrightarrow\displaystyle\int_{\sqrt{k}}^4\left(x^2-k\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^4 x^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\left(\frac{x^3}{3}-kx\right)\right|_{\sqrt{k}}^4=\frac{32}{3}\Leftrightarrow\frac{64}{3}-4k-\frac{\sqrt{k^3}}{3}+\sqrt{k^3}=\frac{32}{3}$

$$\Leftrightarrow 16=6k-\sqrt{k^3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{k}\right)^3-6\left(\sqrt{k}\right)^2+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{k}=2+2\sqrt{3}\\\sqrt{k}=2-2\sqrt{3}\\\sqrt{k}=2\end{array}\right.\overset{k\in(0;16)}{\Rightarrow}k=4.$$