

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

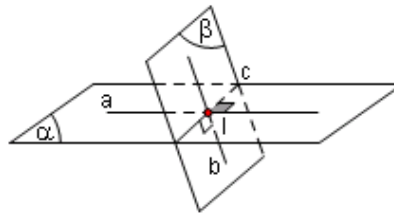
I. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa

- Góc giữa hai mp là góc giữa hai đt lần lượt vuông góc với hai mp đó.
- Nếu hai mp song song hoặc trùng nhau thì góc giữa hai mp đó bằng 0° .

2. Cách xác định góc giữa hai mp cắt nhau

- Tìm giao tuyến của (α) và (β) , giả sử $(\alpha) \cap (\beta) = c$. Lấy điểm $I \in c$.
- Trong (α) , dựng đt a đi qua I và vuông góc c .
- Trong (β) , dựng đt b' đi qua I và vuông góc c .
- Khi đó góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b' .



3. Diện tích hình chiếu của một đa giác

$$S' = S \cdot \cos \varphi$$

- S : diện tích đa giác H nằm trong mp (α) .
- S' : diện tích đa giác H' là hình chiếu vuông góc của H trên mp (β) .
- φ : góc giữa (α) và (β) .

II. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai mp (α) và (β) đgl vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mp đó là góc vuông. Kí hiệu : $(\alpha) \perp (\beta)$.

2. Các định lý

a) Cách chứng minh $(\alpha) \perp (\beta)$: tìm trong (φ) một đường thẳng vuông góc với (β) .

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

$$\text{b) HQ1 : } \left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \\ d \subset (\alpha) \\ d \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (\beta)$$

$$\text{c) HQ2 : } \left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ S \in (\alpha) \\ Sx \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow Sx \subset (\alpha)$$

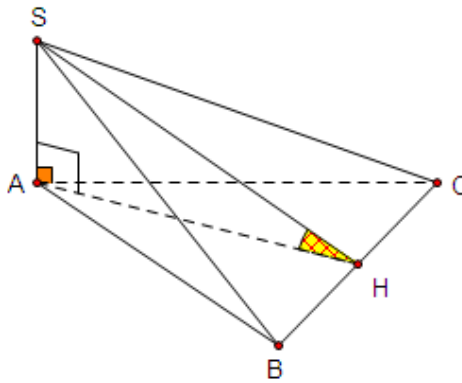
$$\mathbf{d) HQ3 : \left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\gamma)}$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là ΔABC đều cạnh a, có $SA \perp (ABC)$ và có $SA = \frac{a}{2}$. Gọi H là trung điểm của BC.

- Chứng minh : $BC \perp (SAH)$
- Tính góc giữa (ABC) và (SBC) .
- Tính $S_{\Delta SBC}$.

Hướng dẫn



a) Ta có :

- $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$; $BC \subset (ABC)$) (1)
 - $BC \perp AH$ (do ΔABC đều và AH là đường trung tuyến của ΔABC) (2)
 - $SA, AH \subset (SAH)$ (3)
 - $SA \cap AH = A$ (4)
- (1),(2),(3),(4) $\Rightarrow BC \perp (SAH)$

b) Ta có :

- $(ABC) \cap (SBC) = BC$ (4)
- $BC \perp AH$ (do 2) (5)
- $BC \perp SH$ (do $BC \perp (SAH)$; $SH \subset (SAH)$) (6)

(4),(5),(6) \Rightarrow góc giữa (ABC) và (SBC) là SHA

* Ta có : $SA \perp AH$ (do $SA \perp (ABC)$; $AH \subset (ABC)$)

$\Rightarrow \Delta SHA$ vuông tại A

$$\Rightarrow \tan SHA = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SHA = 30^\circ$$

* Vậy góc giữa (ABC) và (SBC) bằng 30° .

c) Ta có : $SA \perp (ABC)$

\Rightarrow hình chiếu của ΔSBC lên (ABC) là ΔABC .

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC} \cdot \cos SHA$$

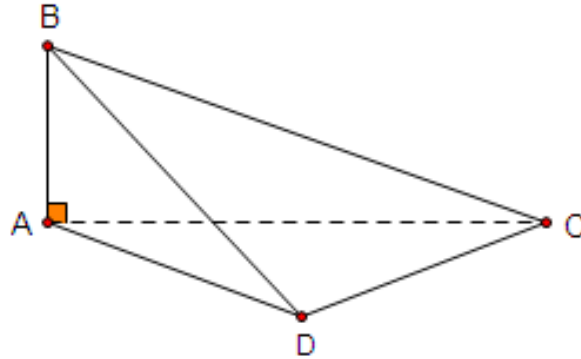
$$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos SHA} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{\cos 30^\circ} = \frac{a^2}{2}$$

Bài 2: Ví dụ: Cho tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh :

a) $(ABC) \perp (ACD)$

b) $(ABD) \perp (ACD)$

Hướng dẫn



a) Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp AC \text{ (gt)} \\ AB \perp AD \text{ (gt)} \\ AC, AD \subset (ACD) \\ AC \cap AD = A \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (ACD)$$

$$\Rightarrow (ABC) \perp (ACD) \text{ (do } AB \subset (ABC))$$

b) Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp AC \text{ (gt)} \\ AB \perp AD \text{ (gt)} \\ AC, AD \subset (ACD) \\ AC \cap AD = A \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (ACD)$$

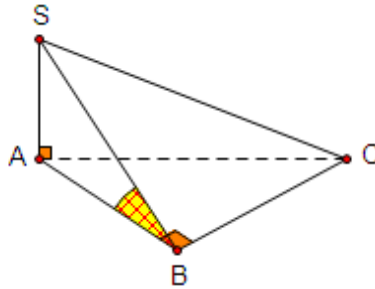
$$\Rightarrow (ABD) \perp (ACD) \text{ (do } AB \subset (ABD))$$

BÀI TẬP HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là $\Delta ABC \perp B$, có $SA \perp (ABC)$, có $SA = a\sqrt{3}$ và $AB = a$.

- Chứng minh : $BC \perp (SAB)$
- Tính góc giữa (ABC) và (SBC) .

Hướng dẫn



a) Ta có :

- $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$; $BC \subset (ABC)$) (1)
- $BC \perp AB$ (do ΔABC vuông tại B) (2)
- $SA, AB \subset (SAB)$ (3)
- $SA \cap AB = A$ (4)

(1),(2),(3),(4) $\Rightarrow BC \perp (SAB)$

b) * Ta có :

- $(ABC) \cap (SBC) = BC$ (4)
- $BC \perp AB$ (do ΔABC vuông tại B) (5)
- $BC \perp SB$ (do $BC \perp (SAB)$; $SB \subset (SAB)$) (6)

(4),(5),(6) \Rightarrow góc giữa (ABC) và (SBC) là SBA

* Ta có : $SA \perp AB$ (do $SA \perp (ABC)$; $AB \subset (ABC)$)

$\Rightarrow \Delta SBA$ vuông tại A

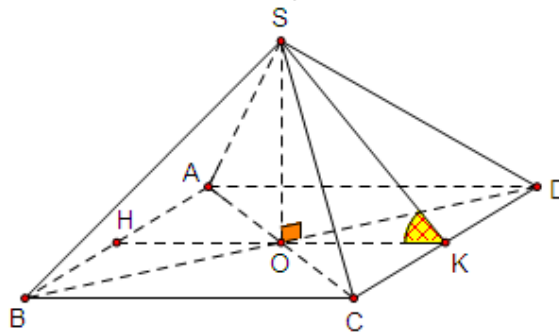
$$\Rightarrow \tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60^\circ$$

Vậy góc giữa (ABC) và (SBC) bằng 60° .

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, có $SA = SB = SC = SD = a$ và có $SO = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD.

- Chứng minh : $SO \perp (ABCD)$
- Tính góc giữa (SCD) và $(ABCD)$.

Hướng dẫn



a) Ta có :

- $SO \perp AC$ (do ΔSAC cân và SO là đường trung tuyến của ΔSAC) (1)
- $SO \perp BD$ (do ΔSBD cân và SO là đường trung tuyến của ΔSBD) (2)
- $AC, BD \subset (ABCD)$ (3)
- $AC \cap BD = O$ (4)

(1),(2),(3),(4) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

b) Ta có

- $(SCD) \cap (ABCD) = CD$ (4)
- $\left. \begin{array}{l} AD \perp CD \text{ (ABCD hv)} \\ HK // AD \text{ (t/c đtb hv)} \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp HK$ (5)
- $CD \perp SK$ (do ΔSCD cân và SK là đường trung tuyến của ΔSCD) (6)

(4),(5),(6) \Rightarrow góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là SKH

Ta có : $SO \perp OK$ (do $SO \perp (ABCD); OK \subset (ABCD)$)

$\Rightarrow \Delta SOK$ vuông tại O

$$\Rightarrow \tan SKO = \frac{SO}{OK} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow SKO = 70^{\circ}31'$$

Vậy góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng $70^{\circ}31'$.